

## Gazdaságosság-térképek számítása során felmerülő matematikai problémák, és ahogy megoldottuk őket

**Klencsár Zoltán, Beck János**

Kaposvári Egyetem, Gazdaságtudományi Kar, Matematika és Fizika Tanszék, 7400 Kaposvár, Guba Sándor u. 40.

### ÖSSZEFOGLALÁS

*A  $g(\theta, \varphi, \underline{x}): R^{n+2} \rightarrow R$  típusú, a földrajzi helyzettől függő – a továbbiakban ún. térképszerű – függvények, ahol  $\theta$  és  $\varphi$  rendre a földrajzi szélesség illetve hosszúság,  $\underline{x} \in R^n$  pedig tetszőleges, további paramétereket leíró vektor,  $\underline{x}$  adott értéke mellett mint térképek ábrázolhatók. Gyakran olyan  $f(g_1(\theta, \varphi, \underline{x}), g_2(\theta, \varphi, \underline{x}), \dots, g_m(\theta, \varphi, \underline{x})): R^m \rightarrow R$  függvények (pl. gazdaságosság) kiértékelésére van szükségünk, melyek térképszerű függvény(ek) értékétől függenek: az ilyen függvények szintén térképszerű függvények lesznek. A gyakorlatban problémát jelent azonban, hogy a földrajzi helyzet függvényében adott adatok a földrajzi szélesség és hosszúság koordinátáknak általában csak diszkrét értékei mellett adottak. E diszkrét értékek egyrészt nem feltétlen esnek egybe a különböző ( $g_j, j = 1 \dots m$ ) függvények esetében, másrészt általában nem egyeznek meg azokkal a  $\theta$  és  $\varphi$  értékekkel, melyeknek megfelelő földrajzi helyeken az  $f$  függvény értékére kíváncsiak vagyunk. Jelen munkában egy olyan új számítógépes programról számolunk be, mely az  $f$  függvény kiszámításának és térképszerű ábrázolásának fent vázolt problémájára a gyakorlatban kielégítő megoldást ad. Bemutatjuk a program készítése során felmerült fontosabb matematikai jellegű problémákat, és az azokra adott megoldásokat. Példaként említjük a szél erőművek földrajzi helyzettől függő gazdaságosságának számítását.*

(Kulcsszavak: gazdaságosság, térkép, szélenergia)

### Mathematical problems related to the calculation of investment efficiency maps, and the ways we solved them

Zoltán Klencsár, János Beck

Kaposvár University, Faculty of Economic Science, Department of Mathematics and Physics, H-7400 Kaposvár, Guba S. u. 40.

### ABSTRACT

*Functions of the type  $g(\theta, \varphi, \underline{x}): R^{n+2} \rightarrow R$ , depending on the geographic coordinates  $\theta$  (latitude) and  $\varphi$  (longitude) as well as – optionally – on further parameters  $\underline{x} \in R^n$  can be pictured as surface maps for each fixed value of  $\underline{x}$ . In the followings we refer to this kind of functions as ‘map functions’. In practice the need may arise to evaluate functions of the form  $f(g_1(\theta, \varphi, \underline{x}), g_2(\theta, \varphi, \underline{x}), \dots, g_m(\theta, \varphi, \underline{x})): R^m \rightarrow R$  (e.g. investment efficiency), which depend on the values of map functions: such  $f$  functions will themselves also be map functions. Often, however, the values of  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  ( $j = 1 \dots m$ ) are given only for a discrete set of  $(\theta, \varphi)$  value pairs, which set may furthermore be different, depending on  $j$ . Additionally, the  $(\theta, \varphi)$  sets for which the values of  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  ( $j = 1 \dots m$ ) are given, may also be different from the  $(\theta, \varphi)$  set for which we intend to evaluate the function  $f$ . The question arises, how to evaluate function  $f$  for an arbitrary  $(\theta, \varphi)$  value approximately? In the present article we report about a new*

computer program that can perform the approximate evaluation of function  $f$ : we outline the methods that the program applies in order to overcome the mathematical problems emphasized above, and as an example we present the investment efficiency map of a wind power plant investment, calculated by the program for the area of Hungary.

(Keywords: investment efficiency, map, wind energy)

## BEVEZETÉS

A gyakorlatban gyakran találkozhatunk olyan összetett függvényekkel, melyek változói maguk is a földrajzi helyzet függvényei. (A továbbiakban az ilyen függvényeket *térképszerű összetett függvényeknek* nevezzük.) Ilyen függvény lehet például egy adott szélerőműberuházás gazdaságossága, melyet számszerűen például a beruházás megtérülési idejével jellemezhetünk: a szélerőmű segítségével nyerhető elektromos teljesítmény ugyanis függ az adott területen mérhető szélesebesség nagyságának átlagától, mely utóbbi viszont a földrajzi helyzet függvénye. A gazdasági környezet paraméterei, melyek szintén befolyásolhatják a beruházás megtérülési idejét, ugyancsak *térképszerű* (azaz a földrajzi helyzettől függő) függvényeknek tekinthetők, hiszen ugrásszerűen változhatnak a települések, régiók vagy országok határain.

A térképszerű  $f(g_1(\theta, \varphi, \underline{x}), g_2(\theta, \varphi, \underline{x}), \dots, g_m(\theta, \varphi, \underline{x}))$ :  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  függvények (ahol  $\theta$  és  $\varphi$  rendre a földrajzi szélesség illetve hosszúság,  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  pedig tetszőleges, további paramétereket leíró vektor) kiértékelését a gyakorlatban gyakran megnehezíti, hogy a különböző  $g_k(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvények értéke csak véges sok  $(\theta_k, \varphi_k)$  számpár esetére adott, ahol  $k = 1 \dots k_{\max}$ . Szükségszerűen ilyen helyzet áll elő például azokban az esetekben, amikor a  $g_k(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvény értékét mérés útján határozzák meg, hiszen a gyakorlatban a mérés csak véges sok pontban végezhető el. A szélesebesség, a csapadékmennyiség, a napsütéses órák száma, a termőföldvastagság, a levegő szennyezettsége stb. mind ilyen függvények.

Az egyszerre több  $g_k(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvény értékétől függő térképszerű összetett  $f$  függvény kiértékelése szempontjából az is problémát jelent, hogy a különböző  $g_k(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvények általában nem ugyanazon  $(\theta_k, \varphi_k)$  számpárok esetében adottak: ilyen helyzet áll elő például akkor, ha a – terméshozamot egyszerre befolyásoló – csapadékmennyiség és termőföldvastagság nem ugyanazon földrajzi helyzetű pontokban lett mérve.

A fent leírt nehézségek miatt a gyakorlatban a térképszerű összetett függvények kiértékelése általában csak közelítő jelleggel történhet, a *pontos* kiértékelés lehetetlen. Jelen munkában egy olyan új számítógépes programról és az abban alkalmazott matematikai eljárásokról számolunk be, ami lehetővé teszi a térképszerű összetett függvények közelítő jellegű kiértékelését, és az eredmény térképszerű formában való megjelenítését. Példaként mutatjuk be a Nordex N60 típusú szélerőmű Magyarország területén történő telepítésének gazdaságosságát, mint a földrajzi helyzet függvényét, melyet – mint térképszerű összetett függvényt – a Magyarország területén a felszín felett 70 méter magasságban mérhető szélesebesség éves átlagát ábrázoló térkép – mint  $g_1(\theta, \varphi, \underline{x})$  –, és egy megfelelő gazdasági modell alapján számítottunk ki.

## ANYAG ÉS MÓDSZER

A szóban forgó számítógépes programot Windows XP operációs rendszer alatt, Borland Delphi 7 alkalmazásfejlesztő környezet felhasználásával készítettük el.

A szélenergia-hasznosítás gazdaságosságának kiszámításához a Magyarország területén a felszín felett 70 méter magasságban mérhető szélesebesség éves átlagát ábrázoló térképet használtuk fel, melyet az Energia Központ Kht. Könyvtára bocsátott

rendelkezésünkre. A kép (bitmap) formájában rendelkezésre álló térképet a Kaposvári Egyetem Matematika és Fizika Tanszékén készített MAPIT nevű programmal alakítottuk át olyan szöveges fájlá, ami a képpontok színe mellett már a pontok földrajzi szélesség és földrajzi hosszúság koordinátáit is tartalmazza.

## EREDMÉNY ÉS ÉRTÉKELÉS

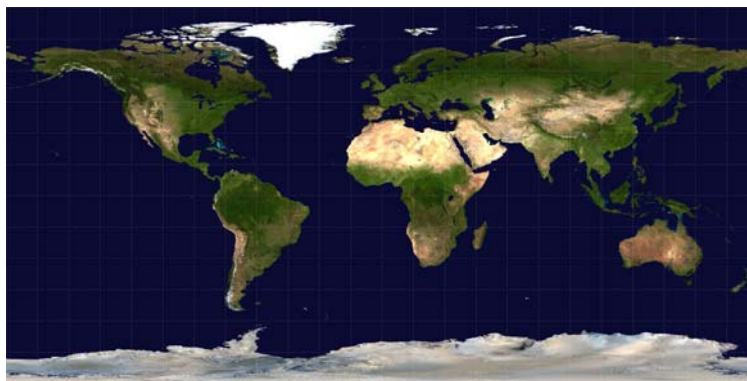
A térképszerű  $f(g_1(\theta, \varphi, \underline{x}), g_2(\theta, \varphi, \underline{x}), \dots, g_m(\theta, \varphi, \underline{x})) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  függvény közelítő kiértékelésére annak feltételezésével kerestünk megoldást, hogy mind a  $g_j(\theta_k, \varphi_k, \underline{x})$  ( $j = 1 \dots m, k = 1 \dots k_{\max,j}$ ) függvényértékek, mind pedig a megfelelő  $\theta_k, \varphi_k$  és  $\underline{x}$  mennyiségek ismeretesek,  $\theta$  (a földrajzi szélesség) és  $\varphi$  (a földrajzi hosszúság) pedig a földfelszín bármely pontjának megfelelő értéket felvehet. (A Föld alakját a számítások során gömbbel közelítettük.)

A  $g_j$  térképszerű függvények (pl. széltérkép) színekódolt formában álltak rendelkezésünkre, azaz esetünkben  $g_j$  valamely adott  $\theta_k$  és  $\varphi_k$  koordinátával jellemezhető ponthoz nem a térképen ábrázolt fizikai – vagy egyéb – mennyiség tényleges értékét, hanem az adott értékhez – a térkép készítői által önkényes, de bijektív módon – hozzárendelt szín RGB kódját rendeli.

Elsőként a térképszerű  $g_j$  függvények megfelelően informatív ábrázolásának feladatát kellett megoldanunk. (Mint látni fogjuk, e feladat megoldása közvetlenül kapcsolódik az  $f$  függvény kiszámításának problémaköréhez.) A – gömbnek képzelt – Föld felületén adott  $g_j$  függvények informatív ábrázolásához olyan programot kellett kidolgoznunk, ami lehetővé teszi, hogy a Földnek megfelelő gömböt<sup>1</sup> (és a felületén ábrázolt függvényt) különböző irányokból és távolságokról szemlélhessük. A program működését a következőkben a Föld növényzettérképe segítségével fogjuk szemléltetni, mely térkép az 1. ábrán bemutatott formában állt a rendelkezésünkre.

### 1. ábra

#### A Föld növényzettérképe (ún. *plate carrée* hengervetület)



Forrás (Source): NASA (2007)

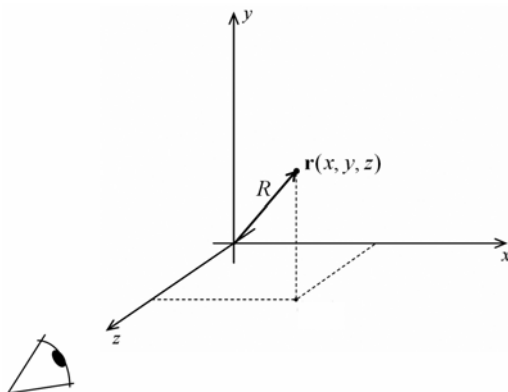
Figure 1: Vegetation map of Earth (so called *plate carrée* cylindrical projection)

<sup>1</sup> A „Földnek megfelelő gömb”-re a továbbiakban az egyszerűség kedvéért mint „Föld” hivatkozunk.

A feladat megoldását a 2. ábrán látható – képernyőhöz rögzített – koordinátarendszerben végeztük el: e koordinátarendszer tengelyeit természetes módon jelölik ki a Föld középpontja (a koordinátarendszer origója), a megfigyelő iránya (z tengely, ez az irány a képernyő síkjára merőleges), és a Föld forgástengelyének iránya (y tengely) abban az esetben, ha a Földet valamely zérus földrajzi szélességű pontnak megfelelő irányból (pl. az egyenlítőről) szemléljük. A koordinátarendszert így választva az xy sík a képernyő síkjával párhuzamos, illetve a számítások szempontjából a képernyő síkjával egybeesőnek tekinthető. Kiindulásképpen továbbá a Földet úgy helyezzük el e koordinátarendszerben, hogy az yz sík egybeesik a greenwichi kezdőmeridián síkjával. Így a kiindulási esetben a Földet a  $(\theta, \varphi) = (0, 0)$  földrajzi koordinátákkal jellemzett pontnak megfelelő irányból szemléljük.

### 1. ábra

#### A térképszerű függvények ábrázolásához használt, képernyőhöz rögzített koordinátarendszer



$R$  jelöli a Föld sugarát, az  $\mathbf{r}$  helyzetvektor pedig ennek megfelelően a Föld felszínének egy pontjába mutat. ( $R$  denotes the earth's radius and, accordingly, the vector  $\mathbf{r}$  points to a point on the surface of the Earth.)

Figure 2: Coordinate system – fixed to the display – used to derive projections of surface maps

A Föld képernyőn való megjelenítése a földfelszín képernyő síkjára vett vetületének ábrázolása útján történhet. A választott koordinátarendszerben valamely  $x$ ,  $y$  és  $z$  koordinátákkal adott pont vetületét a képernyő síkjában az  $x$  és  $y$  koordináták jellemzik:

$$\mathcal{P}\mathbf{r}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ahol  $\mathcal{P}$  jelöli az  $xy$  síkra történő vetítés műveletét. A megjelenítés során természetesen csak a Föld megfigyelő felé eső oldalát kell megrajzolnunk, ezért a  $z < 0$  koordinátával jellemezhető pontok nem kerülnek ábrázolásra.

Ha a Földet valamely  $(\theta_0, \varphi_0)$  irányból kívánjuk szemlélni, akkor a Földet a 2. ábrán látható koordinátarendszerben az origó körül úgy kell elforgatni, hogy a

Földhöz rögzített – földrajzi – koordináta-rendszerben  $(\theta_0, \varphi_0)$  koordinátákkal jellemezhető földfelszíni pontba mutató  $\mathbf{r}(\theta_0, \varphi_0)$  vektor a  $z$  tengely irányába ( $\mathbf{e}_z$ ) mutasson. Ez azonban még nem határozza meg egyértelműen az ábrázolandó vetületet, hiszen az előzőeknek megfelelően elforgatott Föld  $z$  tengely körül való további elforgatásával végtelen sok különböző vetület nyerhető. A különböző vetületek közül kitüntetettnek tekinthető az, mely esetében a Föld forgástengelyének vetülete az  $y$  tengellyel esik egybe oly módon, hogy a forgástengely vetületvektorának iránya az  $y$  tengely irányával egyezik meg. Ezt a vetületet úgy állíthatjuk elő, hogy az  $\mathbf{r}(\theta_0, \varphi_0)$  vektort először  $-\varphi_0$  szöggel elforgatjuk a Föld forgástengelye (azaz az  $y$  tengely) körül, majd pedig az így kapott vektort elforgatjuk  $\theta_0$  szöggel az  $x$  tengely körül. Az  $y$  tengely körül  $\alpha$  szöggel való forgatás műveletének  $\mathbf{O}_y(\alpha)$  mátrixa (Rózsa, 1991)

$$\mathbf{O}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Az  $x$  tengely körül  $\alpha$  szöggel való forgatás műveletének  $\mathbf{O}_x(\alpha)$  mátrixa pedig (Rózsa, 1991)

$$\mathbf{O}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Egy tetszőleges földfelszíni pontba mutató  $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$  vektor koordinátái az elforgatás előtt

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \\ \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ahol  $R$  a Föld sugarát jelöli. Ahhoz, hogy megtudjuk hová esik az  $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$  vektorral jellemzett földfelszíni pont (kitüntetett) vetülete abban az esetben, ha a Földet az  $\mathbf{r}(\theta_0, \varphi_0)$  vektor irányából szemléljük, ki kell számítanunk, hogy hová fog mutatni a – Földhöz rögzített –  $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$  vektor, ha a Földet az origó körül oly módon forgatjuk el, hogy a – szintén Földhöz rögzítettnek képzelt –  $\mathbf{r}(\theta_0, \varphi_0)$  vektor a  $z$  tengely irányába mutasson. Az elforgatás után a képernyőhöz rögzített koordináta-rendszerben az  $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$  vektornak az

$$\mathbf{r}_f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = \mathbf{O}_x(\theta_0) \mathbf{O}_y(-\varphi_0) \mathbf{r}(\theta, \varphi) \quad (5)$$

vektor felel meg. A (2–4) kifejezések alapján az  $\mathbf{r}_f$  vektor az

$$\mathbf{r}_f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & 0 & -\sin \varphi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_0 & 0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \\ \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (6)$$

alakba írható, ami a jobb oldalon feltüntetett műveletek elvégzése után az

$$\mathbf{r}_f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & 0 & -\sin \varphi_0 \\ -\sin \theta_0 \sin \varphi_0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \theta_0 \sin \varphi_0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \\ \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (7)$$

illetve az

$$\mathbf{r}_f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta_0 \sin \theta - \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta_0 \sin \theta + \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}, (8)$$

és végül az

$$\mathbf{r}_f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \cos \theta_0 \sin \theta - \sin \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \sin \theta_0 \sin \theta + \cos \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0) \end{pmatrix} (9)$$

eredményre vezet. Ha  $e$  vektor  $z$  komponense nem negatív, akkor a neki megfelelő földfelszíni pont a megfigyelő számára látható, és annak  $xy$  síkra vett vetületét a

$$\mathcal{P} \mathbf{r}_f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \cos \theta_0 \sin \theta - \sin \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} (10)$$

vektor adja meg. A megfigyelő Földtől mért távolsága az  $R$  sugárnak megfelelő pixelek számát befolyásolja: utóbbinak nagyobb/kisebb értéket adva olyan vetületi képet jeleníthetünk meg, melyet a Földet közelebről/távolabbról szemlélő megfigyelő látna.

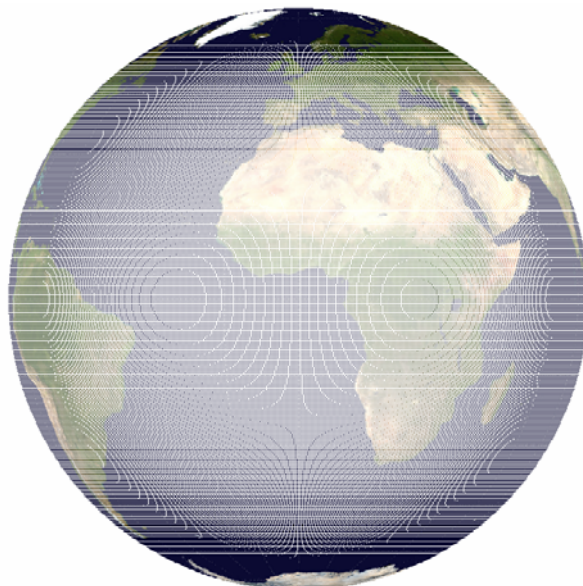
A fent leírt módon – az *1. ábrán* látható növényzettérkép alapján – elkészített vetületet mutat a *3. ábra*. Bár a vetület megjelenített pontjainak helyzete láthatóan helyes, s így az ábrázolás valóság-hű, a vetület pontjai nem töltik ki hézagmentesen a földgömb vetületének megfelelő kör területét, s emiatt a vetület ábrázolása kevésbé informatív, mint pl. az *1. ábrán* látható hengervetületé. Ha a kiindulási adatok (lásd *1. ábra*) nagyobb felszíni sűrűséggel állnának rendelkezésre, úgy természetesen a *3. ábrának* megfelelő vetület is kevesebb üres pontot tartalmazna, és a kép informatívabb lenne. Bármilyen – véges – felszíni sűrűséggel állnak is azonban rendelkezésünkre a kiindulási térkép adatpontjai, ha azok alapján a vetületeket pontonként rajzoljuk meg, a Földet bizonyos távolságnál közelebről szemlélve mindig szembesülnünk kell azzal, hogy a vetület pontjai nem hézagmentesen töltik ki a rendelkezésükre álló területet.

A vetület ábrázolásának fenti problémáját megoldhatjuk, ha sikerül a földfelszín térképének minden egyes rendelkezésünkre álló pontjához hozzárendelnünk egy környezetet (a pontot tartalmazó, vele azonos színű felületelemet) oly módon, hogy  $e$  környezet más pontot ne tartalmazzon, és a vele szomszédos pontkörnyezetekhez szorosan – hézagmentesen – illeszkedjen. Ebben az esetben ugyanis a pontok helyett azok környezeteinek vetületét ábrázolva a vetületi kép is hézagmentesen lefedné a rendelkezésre álló területet – bármilyen közelről szemléljük is a Földet. A Föld felszínén akár kézzel is könnyedén megrajzolhatunk ilyen környezeteket, amint azt pl. a *4. ábra* mutatja. A földfelszínen meghatározott környezetek pontos vetületének kiszámítása és megrajzolása azonban már korántsem egyszerű feladat: a kívánt hézagmentes vetületek ennél egyszerűbb módon is előállíthatóak.

A következőkben a keresett hézagmentes vetületek előállításának egy kétlépéses módszerét tárgyaljuk. A módszer arra a felismerésre épül, hogy ha a földfelszín valamely sík vetületén sikerül a pontokhoz a rendelkezésre álló területet hézagmentesen lefedő környezeteket rendelni, akkor a földfelszín megfelelő környezetei (melyek vetületeiként az adott síkvetületen meghatározott környezetek előállnak) szintén hézagmentesen lefedik a gömbfelszín megfelelő részét, s így más síkra vett vetületük szintén hézagmentes lefedést fog biztosítani. Tehát annak ellenére, hogy a pontokhoz csak egy meghatározott vetületen rendeljük hozzá a környezetüket,  $e$  környezetek projekció előtti ösképe a Föld felszínén bármely más síkra vett vetület esetén is hézagmentesen lefedi a rendelkezésre álló területet.

**3. ábra**

**A Föld felszínének annak feltételezésével kiszámított vetülete,  
hogy a Földet a  $(\theta_0, \varphi_0) = (0,0)$  irányból szemléljük**

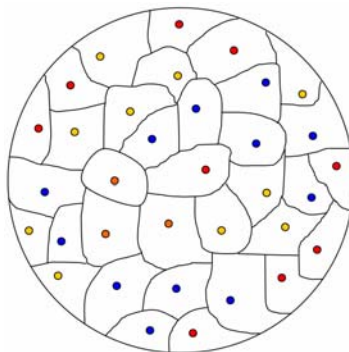


Jól látható, hogy a felszín pontjainak vetülete a vetület síkjában ( $xy$  sík, 2. ábra) nem hézagmentesen tölti ki a földgömb vetületének megfelelő kör területét. *It is obvious that in the plane  $xy$  (Figure 2.) there are gaps between the projection of the surface points.*

*Figure 3: Projection of the Earth's surface as seen from the direction of  $(\theta_0, \varphi_0) = (0,0)$*

**4. ábra**

**A Föld felszínén elhelyezett különálló pontok köré szabadkézzel könnyű olyan környezetet rajzolni, ami hézagmentesen lefedi a Föld felületét**



*Figure 4: By hand it is easy to draw environments around the points given on the Earth's surface, which cover the surface in a gapless way*

A módszer első lépése során a Föld felszínén adott pontokból olyan hármast csoportokat képzünk, melyek vetülete által alkotott háromszög egyetlen másik pont vetületét sem tartalmazza. A Föld felszínén adott valamennyi pont csoportba foglalása azonban mindig több különböző vetület felhasználását igényli, hiszen nincs olyan irány, ahonnan a földfelszín összes pontja egyszerre látható lenne. Adott vetület esetében a csoportok kialakításának menetét az 5. ábra *a – d* állomásai szemléltetik. A főbb lépések a következők.

- Egy találmásra kiválasztott kiindulópont és a hozzá legközelebb eső pont között meghúzzuk az első élt.
- Megkeressük azt a pontot, amelyből az imént meghúzott él a legnagyobb szög alatt látszik, és ennek felhasználásával meghúzzuk az ábra szerinti két új élt, megalkotva ezzel az első olyan háromszöget, aminek a belsejében biztosan nincs pont.
- Ugyanilyen módon megrajzoljuk az elsőként berajzolt él másik oldalán is az éleket, illetve a megfelelő háromszöget.
- Miután a legelső élre több háromszöget rajzolni már nem lehet, az eljárást a másodiknak megrajzolt éllel, majd a további éllel folytatjuk mindaddig, amíg találunk olyan élt, amire a leírt eljárással újabb háromszöget lehet rajzolni.

Az eljárás végeztével a szélső pontok kivételével valamennyi pontot háromszögek veszik körül úgy, ahogy az 5. ábra *d* állomása azt egyetlen pont esetében szemlélteti. Ha ezek után a pontot körülvevő  $n$  háromszög mindegyikének belsejében kijelölünk egy pontot (pl. a háromszögek súlypontját) és az így kapott  $n$  pontot összekötjük, akkor megkapjuk a középső pont egy környezetét (5. ábra, *e*). Ha ezt a vetület valamennyi pontjára vonatkozóan elvégezzük, akkor – feltéve, hogy ugyanabban a háromszögben mindig ugyanazt a pontot választjuk belső pontnak – az így kapott környezetek (poligonok) hézagmentesen fedik le a vetület síkjának általuk elfoglalt területét. Ha a pontok poligon környezetét a pontok színére festjük, akkor tetszőleges nagyítás mellett informatív megjelenítést kapunk az ábrázolt terület színét, illetve a szín által kifejezett tulajdonságot illetően (5. ábra, *f*).

A poligon környezetek csúcspontjait azonban a vetület síkja helyett előnyösebb egyből a Föld felszínén meghatározni. Egy adott síkháromszöghöz tartozó poligon csúcspontot a Föld felszínén úgy kaphatunk meg, hogy a háromszög csúcsainak (a Föld felszínén elhelyezkedő) ösképébe mutató vektorok átlagát meghosszabbítjuk a Föld felszínig.

A fentiek szerint eljárva minden egyes térképponthoz hozzárendelhetünk  $n$  olyan pontot a Föld felszínén, melyek vetülete – általában – egy  $n$  oldalú poligont határoz meg. Az így kapott poligonok tetszőleges vetület esetén hézagmentesen töltik ki a Földgömb vetületeként előálló kör területét (6. ábra).

Az egyes  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  ( $j = 1 \dots m$ ) térképek – fentiekben leírt módon elkészített – poligonokra való felbontása a  $f(g_1(\theta, \varphi, \underline{x}), g_2(\theta, \varphi, \underline{x}), \dots, g_m(\theta, \varphi, \underline{x}))$ :  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  függvény közelítő kiértékelését is lehetővé teszi. Ha ugyanis a Föld felszínén a poligonok csúcsait főkörök mentén összekötjük, akkor e gömbi poligonok a hozzájuk tartozó  $(\theta_j, \varphi_j)$  koordinátákkal bíró térképpont egy olyan környezetét adják, melyben a  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvény értékét a  $g_j(\theta_j, \varphi_j, \underline{x})$  ismert függvényértékkel közelíthetjük. (Ez lényegében azt jelenti, hogy a Föld felszínén véges sok pontban adott  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvényt egy lépcsős függvénnyel közelítjük.) A  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  függvény, és ezzel egyidejűleg a fenti  $f$  függvény közelítő kiszámításához ezért mindössze azt kell eldöntenünk, hogy a  $(\theta, \varphi)$  koordinátákkal jellemzett pont a  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  ( $j = 1 \dots m$ ) térkép melyik poligonjába esik.

Azt, hogy a síkon egy pont vajon egy poligon belsejébe esik-e vagy sem, eldönthetjük, ha megszámloljuk, hogy a poligon egy belső pontjából a kérdéses pontba húzott szakasz hányszor metszi a poligon oldalait (7. ábra). Ha a metszéspontok száma páros, akkor – és csak akkor – a kérdéses pont a poligon belső pontja. Ha a pontokat



főkörök mentén kötjük össze, akkor ugyanez az eljárás a Föld felszínén adott gömbi poligonok esetében is alkalmazható: ebben az esetben a gömbi poligon belsejébe eső pontot a kérdéses ponttal összekötő főkörívnek és a gömbi poligon oldalait képező főköríveknek a metszéspontjait kell összeszámolni.

### 5. ábra

#### Poligontérképek térképpontok alapján történő előállításának elve

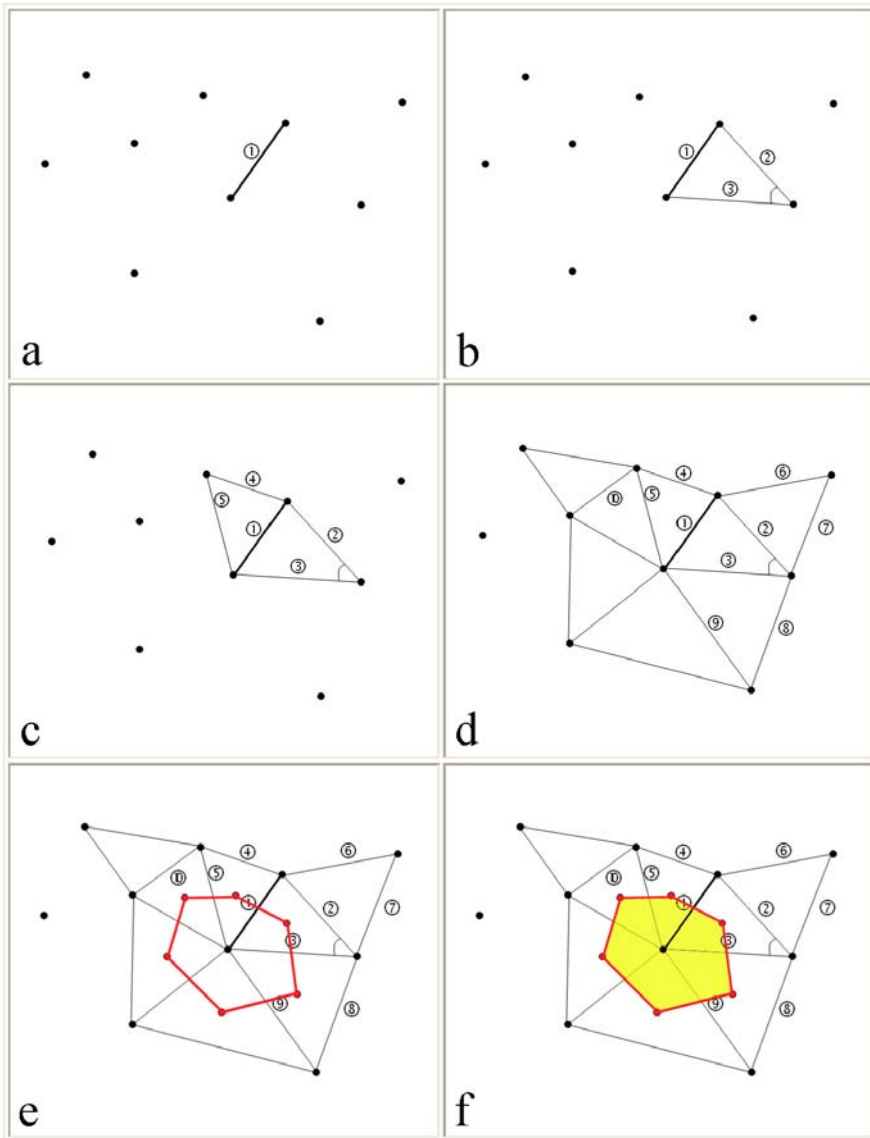
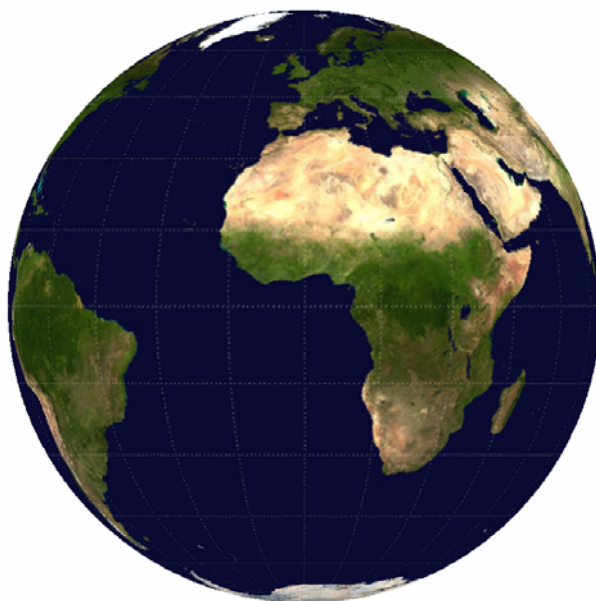


Figure 5: Principle of the creation of polygon-based maps on the basis of point-based maps

## 6. ábra

A földfelszín egy vetületének poligonok segítségével történő ábrázolása

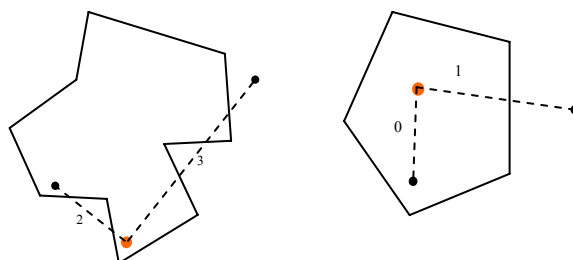


Jól látható, hogy a poligonok hézagmentesen töltik ki a földgömb vetületének megfelelő kör területét. *It can be seen that the polygons establish a gapless projection.*

*Figure 6: Projection of Earth's surface by the help of the polygons*

## 7. ábra

**Azt, hogy egy pont a poligonon belül vagy kívül helyezkedik el, eldönthetjük, ha megszámláljuk, hogy a poligon egy belső pontjából a kérdéses pontba húzott szakasz hányszor metszi a poligon oldalait.**



A szaggatott vonalakra írt számok az adott szakasz által megvalósított szóban forgó metszéspontok számát mutatják. *The numbers beside the broken lines denote the number of intersections they form with the polygon's sides.*

*Figure 7: One can determine whether a point is inside or outside of a polygon by counting the intersections that are formed by the sides of the polygon and the section between the point in question and an inner point of the polygon*

A fenti vázolt módszerek alkalmazásával az  $f$  térképszerű összetett függvény közelítő kiértékelése tetszőleges olyan  $(\theta, \varphi)$  koordinátákkal jellemzett pontban végezhető, mely ponthoz valamennyi  $g_j(\theta, \varphi, \underline{x})$  ( $j = 1 \dots m$ ) térkép poligon felbontásában található olyan poligon, ami a kérdéses pontot tartalmazza.

A fenti módszert sikerrel alkalmaztuk többek közt a szélenergia magyarországi gazdaságosságát bemutató térképek kiszámítására (Beck és Klencsár, 2007). Példaként közöljük az 1 kWh villamos energia teljes élettartamra vetített előállítási költségét ábrázoló térképet (8. ábra), ami egy 60 m rotorátmérőjű, 85 m tengelymagasságú, Nordex N60 típusú szélgéppel feltételezésével került kiszámításra.

## 8. ábra

### 1 kWh teljes élettartamra vetített előállítási költségének függése a földrajzi helyzettől Magyarországon (Ft)



Figure 8: Average production costs (in HUF) of 1 kWh electrical energy considering all the expenditures arisen and all the electrical energy produced in Hungary

## KÖVETKEZTETÉSEK

A különböző  $g_j$  térképszerű függvények értékétől függő  $f$  térképszerű összetett függvények pontos kiértékelése nem lehetséges, ha a különböző  $g_j$  térképek által megadott szükséges adatok nem ugyanazon földrajzi helyzetű pontokban lettek meghatározva. Megmutattuk, hogy a  $g_j$  pontonként adott térképek poligonokra való felbontásával lehetőség nyílik a szóban forgó térképszerű összetett függvény közelítő jelleggel történő kiértékelésére és ábrázolására. Leírtuk azt a módszert, aminek segítségével a  $g_j$  pontonként adott térképek poligonokra való felbontása elvégezhető.

## IRODALOM

- Beck, J., Klencsár, Z. (2007) Nap- és szélenergia helyileg optimális megválasztását segítő számítógépes program. In: Acta Agraria Kaposváriensis, 11. 2. 135-152. p.  
 NASA (2007): Visible Earth. [online] <http://visibleearth.nasa.gov/> [2007. október 14.]  
 Rózsa P. (1991) Lineáris algebra és alkalmazásai. Budapest : Tankönyvkiadó, 152. p.

Levelezési cím (*Corresponding author*):

**Klencsár Zoltán**

Kaposvári Egyetem, Gazdaságtudományi Kar

Matematika és Fizika Tanszék

7401 Kaposvár, Pf. 16.

*Kaposvár University, Faculty of Economic Science*

*Department of Mathematics and Physics*

*H-7401 Kaposvár, POB 16.*

Tel.: 36-82-505-955

e-mail: z.klencsar@somogy.hu